On montrerait de la même manière que $\int_{\mathscr{L}} S_y(s)\,\mathrm{d}\omega_Q = -\int_{\mathscr{L}} \omega_Q(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma$. Par conséquent :

$$M_Q = +\frac{T_y}{I_z}\int_{\mathscr{L}} \omega_Q(s)\cdot y\,\mathrm{d}\Sigma + \frac{T_z}{I_y}\int_{\mathscr{L}} \omega_Q(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma$$

Les termes $\int_{\mathscr{L}} \omega_Q(s)\cdot y\,\mathrm{d}\Sigma$ et $\int_{\mathscr{L}} \omega_Q(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma$ sont appelés, respectivement, moments sectoriels de pôle Q de 1er ordre – ou premiers moments sectoriels – par rapport aux axes, respectivement, Gz et Gy [17].

4.6.3 Centre de flexion

4.6.3.1 Définition

On appelle **centre de flexion** le point C du plan de section droite où le moment produit par les contraintes de cisaillement de flexion est nul.

Remarque 9. En règle générale, le centre de flexion n'est pas confondu avec le centre de gravité du plan de section droite.

Si le moment des flux de cisaillement de flexion M_C est nul quelque soit l'intensité des efforts tranchants T_y et T_z, c'est que les moments sectoriels T_z de pôle C sont nuls ; d'où la propriété suivante :

Proposition 6. Le centre de flexion est le point du plan de section droite de premiers moments sectoriels nuls ; le centre de flexion est donc une caractéristique intrinsèque du plan de section droite :

$$\int_{\mathscr{L}} \omega_C(s)\cdot y\,\mathrm{d}\Sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathscr{L}} \omega_C(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma = 0$$

4.6.3.2 Conséquence

Soit $\{\tau_f\}$ la distribution des contraintes de cisaillement de flexion et soit $\{\tau_t\}$ la distribution des contraintes de cisaillement de torsion. Alors la distribution des contraintes de cisaillement tous types confondus est $\{\tau\} = \{\tau_f\} + \{\tau_t\}$.

1. La distribution $\{\tau_f\}$ est équivalente au torseur $\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{T} = T_y\,\overrightarrow{y} + T_z\,\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_C$
2. La distribution $\{\tau_t\}$ est équivalente au torseur $\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M_x} \end{array}\right\}$ en tout point
3. La superposition $\{\tau\} = \{\tau_f\} + \{\tau_t\}$ est équivalente au torseur $\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{M_x} \end{array}\right\}_C$

Conséquence Le moment de torsion est toujours évalué au centre de flexion.

17. Bien noter que les cotes y et z sont comptées par rapport au centre de gravité G indépendamment du choix fait pour le pôle Q.

4.6.3.3 Détermination de la position du centre de flexion C (cas général)

Par définition :

$$\overrightarrow{M_C} = \int_{(\mathscr{L})} \overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{\Phi_f}(s)\,\mathrm{d}s = \overrightarrow{0}$$

Supposons le moment des flux de cisaillement $\overrightarrow{M_G}$ connu en G, alors :

$$\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{M_C} + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{T} = \left[y_C \cdot T_z - z_C \cdot Ty\right]\overrightarrow{x}$$

Par conséquent :

$$\left[y_C \cdot T_z - z_C \cdot Ty\right] = +\frac{T_y}{I_z}\int_{\mathscr{L}} \omega_G(s)\cdot y\,\mathrm{d}\Sigma + \frac{T_z}{I_y}\int_{\mathscr{L}} \omega_G(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma$$

Identifions les termes deux à deux :

$$y_C = +\frac{1}{I_z}\int_{\mathscr{L}} \omega_G(s)\cdot y\,\mathrm{d}\Sigma \qquad z_C = -\frac{1}{I_y}\int_{\mathscr{L}} \omega_G(s)\cdot z\,\mathrm{d}\Sigma$$

En pratique :

1. Si le profil possède deux axes de symétrie alors le centre de flexion est confondu avec le centre de gravité lui-même confondu avec le centre de symétrie ;
2. Si le profil possède un axe de symétrie alors le centre de flexion est situé sur cet axe. Le centre de gravité est également sur cet axe mais généralement à une autre place ;
3. D'un point de vue qualitatif, lorsque le profil ouvert présente une certaine convexité, alors le centre de gravité est situé dans la convexité alors que le centre de flexion est placé à l'extérieur de la convexité ;
4. Si l'on peut déterminer le point de concours des flux de cisaillement, alors ce point de concours est le centre de flexion ;
5. En alternative au § 4.6.3.3 dans la recherche du centre de flexion, on peut également procéder comme suit : (a) calculer le moment produit par le flux de cisaillement en un point $Q\left(y_Q, z_Q\right)$ là où le calcul semble le plus simple à conduire, (b) exprimer la relation

   $$\overrightarrow{M_Q} = \overrightarrow{QC} \wedge \overrightarrow{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_C - y_Q \\ z_C - z_Q \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} T_y \\ T_z \end{bmatrix} = M_Q \Rightarrow \left(y_C - y_Q\right)T_z - \left(z_C - z_Q\right)T_y = M_Q$$

   Comme M_Q est une fonction linéaire de T_y et de T_z, cette dernière égalité permet de déduire y_C et z_C. Cette méthode évite le calcul explicite des moments sectoriels.

4.6.3.4 Position du centre de flexion (quelques cas particuliers)

Les règles « sur le pouce » évoquées ci-dessus sont illustrées en figure 4.27.